Propriétés des probabilités

- $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement A.
- Si $\bar{A}$ signifie "non A", alors, pour tout événement A: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Si A et B sont des *événements incompatibles*, c'est-à-dire, tels que $A \cap B = \emptyset$ (*événement impossible*), alors: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout A et tout B: $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$, $\quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.
- A et B indépendants: $P(B|A) = P(B)$, $P(A|B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Formule de Bayes: $P(B|A) = [P(A|B)P(B)]/P(A)$.
- Probabilité totale: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$.

Table de comptages

	B	$\bar{B}$	Total
A	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
$\bar{A}$	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{..}$

- Comparer deux proportions $p_1 = P(B|A)$ et $p_2 = P(B|\bar{A})$

$$\hat{p}_1 = n_{11}/n_{1.}, \quad \hat{p}_2 = n_{21}/n_{2.}, \quad \hat{p} = n_{.1}/n_{..},$$

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_{1.} + 1/n_{2.})}}.$$

Test bilatéral de niveau α:
$\mathcal{H}_0 : p_1 = p_2, \quad \mathcal{H}_1 : p_1 \neq p_2$; rejeter $\mathcal{H}_0$ si $z < -z_{\alpha/2}$ ou si $z > z_{\alpha/2}$.

α	10%	5%	1%
$z_{\alpha/2}$	1.645	1.960	2.576

Test unilatéral de niveau α:
$\mathcal{H}_0 : p_1 = p_2, \quad \mathcal{H}_1 : p_1 > p_2$; rejeter $\mathcal{H}_0$ si $z > z_\alpha$.

α	10%	5%	1%
z_α	1.282	1.645	2.326

- Test bilatéral d'indépendance de niveau α:

$\mathcal{H}_0$: A et B indépendants; rejeter $\mathcal{H}_0$ si $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, où

$$\chi^2 = z^2 = \frac{n_{..}(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}}$$

α	10%	5%	1%
χ^2_α	2.71	3.84	6.63

$$\chi^2_\alpha = (z_{\alpha/2})^2$$

Tests de Student

• Moyenne $m(X)$ et écart type $s(X)$ des données $X:\quad x_1,\ldots,x_n$

$$m(X)=\frac{1}{n}\sum x_i,\quad s(X)=\left[\frac{1}{n-1}\sum(x_i-m(X))^2\right]^{1/2}.$$

• $t_{\alpha,n}$ = percentile $1-\alpha$ de la distribution de Student à n d.d.l.

• Test pour la moyenne de population μ d'une variable X

$$\text{Données } X:\quad x_1,\ldots,x_n$$

$$t=\frac{m(X)-\mu_0}{s(X)/\sqrt{n}}$$

$\mathcal{H}_0:\mu=\mu_0$ (valeur spécifiée), niveau α
$\mathcal{H}_1:\mu>\mu_0,\quad$ rejeter $\mathcal{H}_0$ si $t>t_{\alpha,n-1}$
$\mathcal{H}_1:\mu<\mu_0,\quad$ rejeter $\mathcal{H}_0$ si $t<-t_{\alpha,n-1}$
$\mathcal{H}_1:\mu\neq\mu_0,\quad$ rejeter $\mathcal{H}_0$ si $t\notin(-t_{\alpha/2,n-1},t_{\alpha/2,n-1})$.

• Intervalle de confiance $1-\alpha$ pour μ :

$$\left(m(X)-t_{\alpha/2,n-1}\frac{s(X)}{\sqrt{n}},\quad m(X)+t_{\alpha/2,n-1}\frac{s(X)}{\sqrt{n}}\right)$$

• Comparer deux moyennes de population μ_1 et μ_2

$$\text{Données non appariées } X:\ x_1,\ldots,x_m,\qquad X':\ x'_1,\ldots,x'_m$$

$$d=m(X)-m(X'),\quad s(D)=\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{(m-1)s(X)^2+(n-1)s(X')^2}{(m-1)+(n-1)}},\quad t=\frac{d}{s(D)}.$$

$\mathcal{H}_0:\mu_1=\mu_2$, niveau α
$\mathcal{H}_1:\mu_1>\mu_2$, rejeter $\mathcal{H}_0$ si $t>t_{\alpha,m+n-2}$
$\mathcal{H}_1:\mu_1<\mu_2$, rejeter $\mathcal{H}_0$ si $t<-t_{\alpha,m+n-2}$
$\mathcal{H}_1:\mu_1\neq\mu_2$, rejeter $\mathcal{H}_0$ si $t\notin(-t_{\alpha/2,m+n-2},t_{\alpha/2,m+n-2})$.

• Intervalle de confiance $1-\alpha$ pour $\mu_1-\mu_2$:

$$\big(d-t_{\alpha/2,n-1}s(D),\quad d+t_{\alpha/2,n-1}s(D)\big).$$

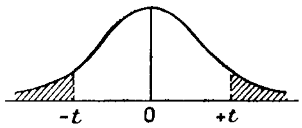
Relation entre écart type et écart interquartile

Si le modèle de Gauss est une bonne description d'une distribution de données, il y a la relation suivante entre l'écart interquartile I_q et l'écart type (déviation standard) s :

$$s\approx I_q/1.349.$$

DISTRIBUTION de Student

La table donne la probabilité p pour que **t** égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).



p / d.d.l.	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	**0,05**	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Exemple: avec d.d.l. = 10, pour t = 2,228 la probabilité est p = 0,05.