

Exemples de problèmes

1. On considère une population de 5 souris. Le degré de réaction à un produit pharmaceutique d'une souris prise au hasard de cette population est une variable aléatoire X telle que

$$P(X = -2) = P(X = 0) = P(X = 2) = 1/5, \quad P(X = 3) = 2/5.$$

Calculer l'espérance μ et la variance σ^2 de la variable X dans la population.

2. Le quart de la population d'une ville européenne de 50 000 habitants a été vacciné contre une épidémie. On a trouvé que 1 malade sur 5 avait été vacciné et que parmi les personnes vaccinées 1 sur 10 a contracté la maladie. On choisit au hasard une personne dans la population.

- (a) Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
- (b) Sachant qu'elle n'a pas été vaccinée, quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

3. Une expérience a été menée dans une ferme afin de comparer 2 types de nourriture: Luzerne A et Luzerne B. Avec un troupeau de 25 vaches laitières, supposé homogène, on a formé aléatoirement deux groupes: l'un de 13 vaches et l'autre de 12. Le premier groupe a été nourri avec la luzerne A et l'autre avec la Luzerne B. On a mesuré la quantité journalière moyenne de lait produit par chaque vache durant une certaine période. Les résultats obtenus sont résumés ci-dessous:

- groupe 1: $\bar{x}_1 = 45.16$ (Kg); $s_1^2 = 64.0$ (Kg²);
- groupe 2: $\bar{x}_2 = 42.25$ (Kg); $s_2^2 = 76.4$ (Kg²);

En supposant la normalité des deux échantillons et l'égalité des variances des deux populations, tester $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ au seuil de signification $\alpha = 0.05$

4. La quantité annuelle de pluie dans une certaine région est répartie normalement autour de $\mu = 140$ (cm/m²) avec une variance $\sigma^2 = 16$ (cm²/m⁴). Quelle est la probabilité

- (a) que dans une certaine année il pleuve plus de 150 cm/m² ?
- (b) qu'à partir de cette année on doit attendre 10 ans afin que l'évènement en (a) se produise.

Indications: on suppose l'indépendance des évènements d'une année à une autre

5. Un étudiant répond aux 20 questions d'un test par un "oui" ou par un "non", avec probabilité 1/2 de répondre juste à chaque question.

- (a) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à au moins 2 questions.
- (b) Calculer la probabilité qu'il réponde juste à toutes les questions.
- (c) Calculer l'espérance et la variance du nombre de réponses justes.

Indication: on suppose que les réponses de l'étudiant sont indépendantes.

6. Selon Nestlé, la probabilité qu'une nouvelle sorte de chocolat ne soit pas appréciée par le marché ("mauvais chocolat") est de 1/10. Toutefois, avant de la commercialiser, Nestlé

s'adresse à trois dégustateurs professionnels qui travaillent de façon indépendante. On suppose que:

- un dégustateur professionnel (quelconque) reconnaît du chocolat qui aura du succès (“bon chocolat”) avec probabilité $7/10$;
- un dégustateur professionnel déclare que du “mauvais” chocolat est “bon” avec probabilité $2/10$.

Calculer:

- la probabilité que le troisième dégustateur trouve que le chocolat est bon sachant que les deux premiers l'ont trouvé bon;
- la probabilité que le chocolat soit mauvais, sachant que les 3 dégustateurs l'ont trouvé bon.

7. Des expériences sont faites sur des étudiants pour savoir si le chocolat améliore leurs performances. Douze étudiants sont partagés au hasard en deux groupes de 5 et de 7 individus. Les 5 étudiants du “groupe A” mangent du chocolat tous les jours, tandis que les 7 étudiants du “groupe B” ont l'interdiction d'en consommer. Les évaluations de chaque étudiant sont relevées après deux mois de “traitement”:

- groupe A: 7, 5, 9, 7, 9;
- groupe B: 5, 4, 7, 6, 6, 8, 9.

Est-il possible d'affirmer que le chocolat améliore les performances des étudiants ?

Aide: $7^2 + 5^2 + 9^2 + 7^2 + 9^2 = 285$, $5^2 + 4^2 + 7^2 + 6^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2 = 307$

8. On ignore le nombre total N de poissons peuplant un certain lac. On entreprend une estimation de N basée sur l'expérience suivante:

- dans une première étape, on extrait sans remise 1548 poissons que l'on marque puis on relâche.
- dans une seconde étape, on retire avec remise 2341 poissons parmi lesquels on dénombre 367 poissons marqués.

Donner l'estimation de N .