Solutions des problèmes

1. $E(X) = -2(1/5) + 0(1/5) + 2(1/5) + 3(2/5) = 6/5$,
$E(X^2) = 4(1/5) + 0(1/5) + 4(1/5) + 9(2/5) = 26/5$,
$\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 26/5 - 36/25 = 94/25$.

2. On obtient la répartition suivante de la population:

	Vacciné	Non vacciné	Total
Malade	1250	5000	6250
Non malade	11250	32500	43750
Total	12500	37500	50000

Donc,

$$P(\text{Malade}) = 6250/50000 = 0.025,$$
$$P(\text{Malade}|\text{Non vacciné}) = 5000/37500 = 0.133.$$

3. On peut utiliser le test de Student pour deux échantillons non appariés avec $n_1 = 13$, $n_2 = 12$, $\bar{x}_1 = 45.16$, $\bar{x}_2 = 42.25$, $s_1^2 = 64.0$, $s_2^2 = 76.4$ et

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}} = 3.348,$$
$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_D} = 0.869.$$

Le percentile 95% de la distribution t à $n_1 + n_2 - 2 = 23$ degrés de liberté est 1.714. Pour le trouver, se référer à la table de la distribution t. Comme la table donne un résultat bilatéral correspondant aux extrémités de la courbe, le quantile 95% est à chercher dans la colonne "0.10", en face de "d.d.l.= 23".
Comme $T < 1.714$, le test unilatéral ne rejette pas l'hypothèse nulle.

4. (a) Soit X la quantité de pluie. Alors, $P(X > 150) = P((X - 140)/4 > (150 - 140)/4) = P(Z > 2.5) = 0062$, où Z est une variable aléatoire avec distribution normale standard.
(b) La probabilité cherchée est $(1 - 0.0062)^9 \cdot 0.0062 = 0.0059$.

5. Soit J le nombre de réponses justes, donc $J \sim \mathcal{B}(n = 20, p = 0.5)$.
(a) $P(J \geq 2) = 1 - P(J = 0) - P(J = 1) = 1 - (1 - p)^{20} - 20 \cdot p \cdot (1 - p)^{19} = 0.99998$.
(b) $P(J = 20) = p^{20} = 9.537 \cdot 10^{-7}$.
(c) $E(J) = 20p = 10$, $\sigma^2(J) = 20p(1 - p) = 5$.

6. Soit $B =$"le chocolat est bon" et $D_i =$"le dégustateur i déclare que le chocolat est bon"; on sait que $P(\bar{B}) = 0.1$, $P(D_i|B) = 0.7$, $P(D_i|\bar{B}) = 0.2$ pour $i = 1, 2, 3$. Il y a deux interprétations possibles de l'idée que les dégustateurs travaillent de façon indépendante: (i) D_1 D_2 et D_3 sont independants; (ii) D_1 D_2 et D_3 sont indépendants et cela lorsque le chocolat est bon et lorsque le chocolat est mauvais.

(a) On cherche $P(D_3|D_1 \cap D_2)$. Dans le cas (i) on a:

$$\begin{aligned}
P(D_3|D_1 \cap D_2) &= \frac{P(D_1 \cap D_2 \cap D_3)}{P(D_1 \cap D_2)} = P(D_3) \\
&= P(D_3|B)P(B) + P(D_3|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.65.
\end{aligned}$$

Dans le cas (ii) on a:

$$\begin{aligned}
P(D_3|D_1 \cap D_2) &= \frac{P(D_1 \cap D_2 \cap D_3)}{P(D_1 \cap D_2)} \\
&= \frac{P(D_1 \cap D_2 \cap D_3|B)P(B) + P(D_1 \cap D_2 \cap D_3|\bar{B})P(\bar{B})}{P(D_1 \cap D_2|B)P(B) + P(D_1 \cap D_2|\bar{B})P(\bar{B})} \\
&= \frac{0.7^3 \cdot 0.9 + 0.2^3 \cdot 0.1}{0.7^2 \cdot 0.9 + 0.2^2 \cdot 0.1} = 0.696.
\end{aligned}$$

(b) En utilisant la formule de Bayes, dans le cas (ii), on obtient:

$$\begin{aligned}
P(\bar{B}|D_1 \cap D_2 \cap D_3) &= \frac{P(D_1 \cap D_2 \cap D_3|\bar{B})P(\bar{B})}{P(D_1 \cap D_2 \cap D_3|B)P(B) + P(D_1 \cap D_2 \cap D_3|\bar{B})P(\bar{B})} \\
&= \frac{0.2^3 \cdot 0.1}{0.7^3 \cdot 0.9 + 0.2^3 \cdot 0.1}.
\end{aligned}$$

Note. Pour répondre à la question (b) on peut aussi utiliser la “deuxième approche” décrite au Chapitre 5, Section 6 du polycopié.

7. On peut utiliser le test de Student unilatéral pour $H_0 : \mu_A = \mu_B$ contre $H_1 : \mu_A > \mu_B$. On a $n_A = 5$, $n_B = 7$, $\bar{x}_A = 7.4$, $\bar{x}_B = 6.429$, $s_A^2 = 2.8$, $s_B^2 = 2.952$ et

$$\begin{aligned}
S_D &= \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \sqrt{\frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)}} = 0.996, \\
T &= \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{S_D} = 0.975.
\end{aligned}$$

Le percentile 95% de la distribution t à $n_A + n_B - 2 = 10$ degrés de liberté est 1.812. Pour le trouver, se référer à la table de la distribution t. Comme la table donne un résultat bilatéral correspondant aux extrémités de la courbe, le quantile 95% est à chercher dans la colonne ”0.10”, en face de ”d.d.l.= 10”.
Comme $T < 1.812$, le test unilatéral ne rejette pas l’hypothèse nulle.

8. Soit N le nombre de poissons dans le lac. Une estimation $\hat{N}$ de N est fournie par l’equation $1548/\hat{N} = 367/2341$ e donc $\hat{N} = 9874$.