

Notations et propriétés de la somme et du produit

En guise d'entrée en matière, voici deux petits rappels de notations mathématiques qui apparaîtront régulièrement dans le polycopié du cours de statistique.

1. Somme

Supposons que nous avons n nombres que nous décidons d'appeler x_1, x_2, \dots, x_n . Considérons la somme S de ces n nombres:

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Une façon plus synthétique de noter cette somme est la suivante:

$$S = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Le signe \sum (sigma grec) signifie "somme". On comprend la ligne précédente de cette façon: "S est égal à la somme des x_i , i allant de 1 jusqu'à n ".

En résumé et par définition:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Exemple 1: Soient $x_1 = 1.2$, $x_2 = 3.4$ et $x_3 = 5.6$. Alors

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 1.2 + 3.4 + 5.6 = 10.2.$$

Exemple 2: Parfois la lettre i n'apparaît pas dans l'expression qui suit le symbole $\sum_{i=1}^n$. En suivant la même logique, on additionne alors n fois l'expression en question. Par exemple, si $m = 3.1$, alors

$$\sum_{i=1}^5 m = m + m + m + m + m = 5m = 15.5.$$

Propriétés élémentaires: Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, et c des nombres réels. Alors

(a) $\sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i$.

(b) $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$

2. Produit

De même, le produit des n nombres x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$P = x_1 x_2 \dots x_n,$$

se note de façon synthétique

$$P = \prod_{i=1}^n x_i,$$

Le signe \prod (pi grec) signifie "produit". On comprend la ligne précédente comme " P est égal au produit des x_i , i allant de 1 jusqu'à n ". On a donc, par définition:

$$\boxed{\prod_{i=1}^n x_i = x_1 x_2 \dots x_n}$$

Exemple 1: Soient $x_1 = 1.2$, $x_2 = 3.4$ et $x_3 = 5.6$. Alors

$$\prod_{i=1}^3 x_i = x_1 x_2 x_3 = 1.2 \times 3.4 \times 5.6 = 22.848.$$

Exemple 2: si $m = 3.1$, alors

$$\prod_{i=1}^5 m = m \times m \times m \times m \times m = m^5 = 286.2915.$$

Propriétés élémentaires: Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, et c des nombres réels. Alors

(a) $\prod_{i=1}^n c x_i = c^n \prod_{i=1}^n x_i.$

(b) $\prod_{i=1}^n x_i y_i = \prod_{i=1}^n x_i \times \prod_{i=1}^n y_i$

Exercices

Voici maintenant quelques exercices qui vous permettront de vous familiariser avec la manipulation du symbole \sum .

(1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) Soient x_1, x_2, \dots, x_n des nombres réels et $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. m est appelé la moyenne arithmétique des x_i . montrer que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n m^2.$$

(3) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des nombres réels, $m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. montrer que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n m_x m_y.$$