

Solutions des exercices sur la somme

- (1) Définissons $s = \sum_{i=1}^n i$. Si on développe cette expression, et qu'on l'écrit deux fois, une fois dans chaque sens, on obtient:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ s &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1. \end{aligned}$$

En additionnant terme à terme les deux lignes précédentes, on a alors:

$$2s = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1).$$

La somme dans le membre de droite de l'équation ci-dessus comporte n termes valant tous $n+1$. On obtient donc

$$2s = n(n+1)$$

et donc

$$s = \frac{n(n+1)}{2}.$$

CQFD

- (2) Développons la parenthèse et appliquons les propriétés de la somme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2mx_i + m^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2mx_i + \sum_{i=1}^n m^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^n x_i + nm^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2mnm + nm^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - nm^2. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'avant dernière ligne, on a utilisé que, par définition de m , $\sum_{i=1}^n x_i = nm$.

CQFD

- (3) A nouveau, on développe l'expression et on applique les propriétés de la somme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i - m_x y_i - m_y x_i + m_x m_y) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - m_x \sum_{i=1}^n y_i - m_y \sum_{i=1}^n x_i + nm_x m_y \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - m_x nm_y - m_y nm_x + nm_x m_y \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - nm_x m_y. \end{aligned}$$

A nouveau, pour obtenir l'avant-dernière expression, on utilise les définitions de m_x et m_y .

CQFD